



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

Факультет «Кораблестроение и морская техника»
Кафедра «Управление качеством»

МЕТОДЫ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ОБЪЕКТОВ

Задания и методические указания к контрольной работе

Ростов-на-Дону
2023

УДК 006.91

Составители: Кошлякова, И.Г., Атоян Т.В., Русин А.П.

Методы непараметрической оценки объектов: метод. указания. – Ростов-на-Дону: Донской гос. техн. ун-т, 2023. – 33 с.

Содержит комплекс практических заданий, направленных на получение навыков непараметрической оценки характеристик объектов, их сравнения, анализа с целью обеспечения качества и достоверности информации о параметрах продукции, процессов и других исследуемых объектов.

Предназначены для бакалавров направления подготовки 27.03.01.

УДК 006.91

Печатается по решению редакционно-издательского совета Донского государственного технического университета

Научный редактор докт. техн. наук, профессор М.С. Степанов

Ответственный за выпуск зав. кафедрой «Управление качеством»
докт. техн. наук, профессор В.П. Димитров

В печать ____ . ____ . 2023 г.
Формат 60×84/16. Объем 2 усл. п. л.
Тираж 200 экз. Заказ №. ____.

Издательский центр ДГТУ
Адрес университета и полиграфического предприятия:
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

© Донской государственный технический университет, 2023

СОДЕРЖАНИЕ И ОФОРМЛЕНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Решение задач контрольной работы оформляется в отдельной тетради или в печатном виде на листах формата А4 с титульным листом типового образца.

Вариант выполнения задачи определяется двумя последними цифрами номера зачетной книжки.

Описание решения задачи рекомендуется в следующей последовательности:

- условие задачи с исходными данными;
- подробное изложение алгоритма решения с цифровыми данными и графическими иллюстрациями;
- выводы.

Во всех заданиях номер варианта выбирается в соответствии с порядковым номером в списке группы.

Задание 1.

Приведите не менее трех примеров применения непараметрических методов оценки в следующих сферах деятельности (выбор задания – по порядковому номеру в списке группы):

- 1) социологии;
- 2) спорте;
- 3) здравоохранении;
- 4) археологии;
- 5) пищевой промышленности;
- 6) автомобилестроении;
- 7) легкой промышленности;
- 8) при оценке соответствия;
- 9) при оценке качества технических изделий;
- 10) туристической отрасли;
- 11) образовании;
- 12) торговле;
- 13) психологии;
- 14) истории;
- 15) биологии;
- 16) гостиничном бизнесе;
- 17) геологии;
- 18) химии.

Задание 2.

Опишите цели и порядок применения методов непараметрической оценки объектов. Что является статистикой каждого критерия?

1. t-критерий Стьюдента для гипотезы о равенстве выборочного среднего некоторому заданному числу.
2. t-критерий Стьюдента для случая несвязанных, независимых выборок.
3. t-критерий Стьюдента для случая связанных (зависимых) выборок.
4. F-критерий Фишера для сравнения дисперсий.
5. T-критерий Вилкоксона.
6. Критерий Манна-Уитни.
7. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена для двух признаков, измеренные в одной и той же группе испытуемых.
8. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена для двух индивидуальных иерархий признаков, выявленных у двух испытуемых по одному и тому же набору признаков.
9. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена для двух групповых иерархий признаков.
10. Критерий Крускала – Уоллиса предназначен для проверки равенства медиан нескольких выборок.
11. Критерий Розенбаума.
12. Критерий Джонкира.
13. Критерий для оценки значимости коэффициента корреляции.
14. Критерий знаков для сравнения состояния некоторого свойства у членов двух зависимых выборок по шкале рангов.
15. χ^2 -критерий для сравнения распределений объектов двух совокупностей на основе измерений по шкале наименований в двух независимых выборках.
16. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена для индивидуальной и групповой иерархий признаков
17. Критерий Сиджела-Тьюки для двух несвязанных выборок.
18. Критерий Зигеля-Тьюки для проверки двух независимых выборок.

Задание 3.

С помощью критерия знаков сравните состояние некоторого свойства у членов двух зависимых выборок на основе измерений, сделанных по шкале не ниже ранговой (таблица 1).

Таблица 1. Результаты измерений исследуемого свойства в двух выборках.

Вар. 1		Вар. 2		Вар.3		Вар.4		Вар.5	
6.9	7.1	15.9	18.0	6.0	8.7	12.2	11.2	20.9	20.8
6.9	6.8	12.4	12.7	9.1	8.2	9.7	13.1	18.1	21.2
5.2	5.4	19.1	16.4	5.8	7.6	14.0	12.4	24.3	20.6
8.0	8.0	17.4	18.2	12.4	6.0	12.8	12.7	22.7	25.2
7.9	7.9	16.2	18.4	9.0	9.4	13.6	14.2	23.5	22.0
5.5	11.3	16.0	18.3	8.5	7.7	13.5	10.9	23.9	19.7
4.6	5.9	13.3	13.6	10.6	8.0	12.0	10.8	19.3	23.4
7.1	7.1	16.9	17.6	7.4	10.1	11.2	12.4	19.1	24.3
5.2	6.3	14.5	14.3	9.7	10.5	12.7	11.1	22.1	20.5
4.3	6.3	15.0	15.9	10.4	9.3	12.3	12.5	21.1	22.5

6.8	7.3	18.3	20.6	9.9	9.9	13.3	12.3	21.5	20.9
4.3	5.0	17.3	21.1	6.6	7.8	14.4	12.9	21.9	21.9
7.7	7.7	14.8	16.6	8.2	11.1	11.6	12.0	23.5	21.5
5.9	6.2	17.0	17.1	13.2	7.1	15.0	11.0	21.4	19.6
7.0	7.2	14.4	19.6	9.7	8.9	11.3	14.5	23.2	19.8
6.5	6.8	12.9	16.4	9.0	9.1	13.6	15.0	22.0	21.6
Вар. 6		Вар. 7		Вар. 8		Вар. 9		Вар. 10	
29.7	25.1	26.3	27.6	14.3	13.6	10.4	8.7	28.8	32.1
29.4	31.2	22.4	22.8	14.4	16.2	9.6	9.1	28.3	28.6
30.7	28.2	25.8	26.1	14.1	13.3	8.8	9.8	31.3	30.4
30.9	26.8	24.5	24.5	14.5	16.6	11.9	10.9	29.1	28.3
27.6	26.9	23.1	24.8	13.9	16.0	9.3	13.0	30.1	33.5
31.2	29.2	24.1	23.9	14.8	13.2	10.4	10.6	33.3	29.1
25.8	25.0	24.3	26.2	11.5	13.8	10.9	10.5	27.7	33.4
28.3	26.5	22.5	22.7	15.1	13.8	12.1	11.9	29.1	30.0
25.9	27.7	23.3	24.1	15.4	10.8	9.4	8.9	26.1	32.8
26.4	24.7	28.6	22.6	15.0	15.0	10.5	10.0	33.0	31.6
27.2	32.1	25.7	23.8	15.5	14.0	10.6	11.3	26.3	27.3
26.5	28.6	23.9	22.7	14.9	16.5	9.3	10.4	32.1	33.9
27.6	28.2	24.0	25.0	14.7	13.9	12.1	9.3	31.7	29.8
27.1	29.9	23.1	22.5	13.4	14.6	9.6	11.8	30.3	31.2
28.0	29.2	22.1	24.5	13.9	15.1	9.9	9.8	35.3	29.2
25.6	25.8	27.1	24.0	13.5	13.8	10.7	9.6	28.9	32.0
Вар. 11		Вар. 12		Вар. 13		Вар. 14		Вар. 15	
30.2	31.5	33.2	38.6	36.1	35.7	34.7	41.1	45.1	40.5
30.5	34.5	34.3	40.7	41.4	33.9	38.8	41.3	47.9	46.8
31.8	35.0	34.4	35.1	38.9	41.2	40.1	40.8	46.7	44.0
31.8	33.9	39.0	39.7	37.6	39.3	39.6	37.7	46.4	42.9
32.9	36.2	35.3	38.6	35.7	37.1	41.4	42.2	46.9	43.7
32.4	32.4	39.2	39.5	37.5	41.9	38.5	38.7	44.2	43.3
32.4	32.5	39.4	35.2	38.4	38.5	39.3	43.8	45.5	45.5
31.7	27.5	39.4	35.0	36.8	39.8	40.6	40.8	48.6	48.5
31.4	31.9	33.6	34.9	38.2	36.2	39.1	39.1	44.1	40.5
30.1	37.6	33.7	33.6	40.5	40.8	38.4	41.8	43.0	42.8
31.5	34.3	37.8	40.7	41.2	41.2	41.1	44.8	43.2	46.4
29.9	31.6	35.2	35.7	41.5	38.2	38.0	38.4	45.3	36.3
32.3	36.7	37.0	37.5	39.8	39.9	42.1	41.8	50.4	38.2
30.8	36.2	36.9	36.9	38.1	38.9	41.3	39.3	46.1	45.3
33.1	33.4	37.5	40.3	38.7	42.4	34.1	35.7	48.2	46.9
29.3	30.3	38.3	38.9	34.7	34.9	41.6	46.4	48.6	47.8

Задание 4.

Провести проверку выборки на нормальность в соответствии с индивидуальным заданием по номеру в списке группы в таблице 2.

Таблица 2. Результаты измерений параметра объекта.

Порядковый	Описание параметров и результаты измерений
------------	--

номер в списке группы										
1	Номинальная масса брутто пакетика сметаны (200±10) г. Взвешивание 30 пакетиков дало следующие результаты:									
	193,4	193,6	196,7	197,1	198,8	198,9	199,3	199,4	203,3	203,6
	193,4	194,9	197,1	197,9	198,9	199,0	199,4	200,4	203,6	204,0
	194,5	196,2	197,7	198,3	198,9	199,1	199,7	200,7	203,8	205,2
2	Номинальная масса упаковки чая (5±0,1) г. Взвешивание 30 упаковок дало следующие результаты:									
	4,97	5,00	4,83	5,10	4,92	5,04	4,92	5,09	4,99	5,04
	4,98	5,00	4,80	5,05	4,85	5,00	4,81	5,07	4,91	5,01
	4,99	4,80	5,06	4,88	5,01	4,81	5,08	4,92	5,02	5,07
3	Вес сверла Ø4 мм, поступившего в продажу в магазин, (20±0,1) г. Взвешивание 30 свёрл дало следующие результаты:									
	19,8	20,2	20,0	20,3	19,9	20,2	20,0	20,1	19,8	19,7
	20,0	20,0	19,8	19,9	20,1	20,3	19,8	19,8	20,0	20,1
	19,8	19,7	20,0	20,0	19,8	20,2	20,0	20,3	19,9	20,2
4	Измерение максимальных размеров (мм) твёрдой фазы (щебня) для приготовления бетона дало следующие результаты:									
	29,1	33,6	37,1	33,3	29,4	29,0	28,3	24,5	33,8	29,3
	26,2	35,2	28,0	26,7	28,5	28,9	28,8	27,1	25,2	24,9
	30,7	23,4	35,0	27,9	35,9	34,0	30,4	27,7	32,6	29,7
5	Номинальная ширина клавиши соломотряса комбайна (200±1,0) мм. Измерение 30 клавиш дало следующие результаты:									
	199,4	199,7	199,8	199,3	200,3	199,6	199,1	199,9	199,4	200,6
	199,6	199,1	199,9	199,4	200,6	199,9	197,9	199,0	199,4	200,0
	199,5	199,7	199,9	199,7	200,8	199,2	199,3	199,1	200,0	200,2
6	Подсчёты количества зёрнышек кукурузы в початке дали следующие результаты:									
	295	267	272	302	297	319	284	268	294	313
	281	296	285	295	292	318	290	291	320	336
	304	316	288	295	330	326	275	294	299	290
7	Подсчёты количества спичек в коробке дали следующие результаты:									
	51	49	50	46	50	47	55	49	51	63
	49	52	45	50	48	55	57	51	45	45
	60	57	48	45	48	50	42	47	52	44
8	Измерения объёма минеральной воды (мм ³) в полуторалитровой полиэтиленовой бутылке дали следующие результаты:									
	1487	1476	1475	1483	1485	1486	1489	1471	1485	1487
	1476	1477	1484	1479	1483	1475	1478	1485	1479	1474
	1482	1494	1490	1476	1473	1473	1482	1478	1486	1479
9	Измерения массы плавленых сырков (г) дали следующие результаты:									
	200	193	192	190	190	194	195	192	196	193
	193	191	200	198	197	199	193	196	190	194
	196	194	198	195	196	197	193	192	190	192
10	Номинальная масса брутто пакетика сливочного масла (200±8) г. Взвешивание 30 пакетиков дало следующие результаты:									
	193,2	196,6	198,7	199,2	203,2	193,5	197,0	198,9	199,3	203,5
	193,5	197,0	198,9	199,3	203,5	194,8	197,8	199,0	200,3	204,0
	194,4	197,6	198,9	199,6	203,7	196,1	198,2	199,1	200,6	205,1
11	Номинальная масса упаковки кофе (5±0,2) г. Взвешивание 30 упаковок дало следующие результаты:									
	4,96	4,81	5,06	4,86	5,03	5,00	4,82	5,08	4,92	5,02
	4,97	4,82	5,07	4,89	5,01	5,00	4,83	5,10	4,92	5,04
	4,98	4,83	5,08	4,92	5,01	4,93	4,97	5,04	5,01	4,99

12	Вес конфеты из партии, поступившей в продажу в магазин, $(20 \pm 0,25)$ г. Взвешивание 30 конфет дало следующие результаты:									
	19,7	20,2	20,0	20,2	19,9	20,2	20,2	20,2	19,8	19,8
	20,1	20,1	19,9	19,8	20,0	20,1	19,9	20,3	20,0	20,3
	19,8	19,8	20,1	20,3	19,8	19,8	20,2	20,1	19,9	20,2
13	Измерение максимальных размеров (мм) толщины альбома для рисования дало следующие результаты:									
	29,4	33,6	37,1	33,3	29,4	29,0	28,3	24,5	33,8	29,3
	26,2	35,5	28,9	26,7	28,5	28,9	28,8	29,1	25,2	24,9
	31,7	23,6	35,4	27,9	35,9	34,0	31,4	27,7	32,6	29,7
14	Номинальная ширина коробки конфет $(200 \pm 1,0)$ мм. Измерение 30 клавиш дало следующие результаты:									
	199,4	199,7	199,8	199,3	200,3	199,6	199,1	199,9	199,4	200,6
	199,6	199,1	199,9	199,4	200,6	199,9	198,9	199,0	199,4	200,0
	199,5	199,7	199,9	199,7	200,8	199,2	199,3	199,1	200,0	200,2
15	Подсчёты количества грецких орехов на дереве дали следующие результаты:									
	1295	1267	1272	1302	1297	1319	1284	1268	1294	1313
	1281	1296	1285	1295	1292	1318	1290	1291	1320	1336
	1304	1316	1288	1295	1330	1326	1275	1294	1299	1290

Определите, соответствует ли распределение нормальному закону.

Задание 5.

Определите с помощью критерия Стьюдента, являются ли две выборки (таблица 3) однородными, т.е. можно ли их отнести к одной генеральной совокупности.

Таблица 3. Значения параметра в выборках.

Вар.1		Вар.2		Вар.3		Вар.4		Вар.5		Вар.6	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	10	11	14	13	11	7	7	16	18	6	9
9	11	12	8	15	16	7	7	12	13	9	8
8	8	12	13	12	13	5	5	19	16	6	8
10	10	11	11	12	12	8	8	17	18	12	6
9	12	13	11	12	15	8	8	16	18	9	9
10	10	12	13	12	14	5	11	16	18	8	8
9	9	12	13	13	13	5	6	13	14	11	8
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	10	13	12	12	14	7	7	17	18	7	10
10	10	14	10	17	13	5	6	15	14	10	10
11	9	12	13	13	12	4	6	15	16	10	9
9	11	12	12	11	11	7	7	18	21	10	10
10	11	12		12	11	4	5	17	17	7	8
10	10	10		13	11	8	8	15	17	8	11
11	12	12		11		6	6	17	20	9	7
	9	13				7	7	14	16	10	9
	11						7	13		9	
Вар.7		Вар.8		Вар.9		Вар.10		Вар.11		Вар.12	
26	28	14	14	10	9	29	32	30	31	33	39
22	23	14	16	10	9	28	29	30	35	34	41

26	26	14	13	9	10	31	30	32	35	34	35
24	25	15	17	12	11	29	28	32	34	39	40
23	25	14	16	9	13	30	34	33	36	35	39
24	24	15	13	10	11	33	29	32	32	39	39
24	26	11	14	11	11	28	33	32	33	39	35
23	23	15	14	12	12	29	30	32	28	39	35
23	24	15	11	9	9	26	33	31	32	34	35
29	23	15	15	11	10	33	32	30	38	34	34
26	24	16	14	11	11	26	27	32	34	38	41
24	23	15	16	9	10	32	34	30	32	35	36
24	25	15	14	12	9	32	30	32	37	37	37
23	22	13	15	10	12	30	31	31	36	37	37
22	24	14	15	10	10	35	29	33	33	38	40
27		13		11			32	29		38	
Вар.13		Вар.14		Вар.15		Вар.16		Вар.17		Вар.18	
50	52	54	55	56	53	50	52	54	55	56	53
55	53	53	54	56	54	55	53	53	54	56	54
51	51	53	57	55	63	51	51	53	57	55	63
51	52	51	55	59	58	51	52	51	55	59	58
49	49	57	53	53	57	49	49	57	53	53	57
52	52	54	55	52	52	52	52	54	55	52	52
56	51	52	54	58	57	56	51	52	54	58	57
54	54	55	59	58	54	54	54	55	59	58	54
50	53	58	55	56	58	50	53	58	55	56	58
52	54	55	54	54	52	52	54	55	54	54	52
53	53	55	53	54	53	53	53	55	53	54	53
55	51	57	51	53	57	55	51	57	51	53	57
53	54	52	56	58	61	53	54	52	56	58	61
53	54	56	53	53	54	53	54	56	53	53	54
48	54	57	54	55	57	48		61		55	57
51			54	61		51		57		61	

Задание 6.

Определите, существует ли корреляция между двумя параметрами, приведенными в таблице 4. При наличии корреляции вычислите коэффициенты и запишите уравнение линейной регрессии.

Таблица 4. Значения параметров x и y .

Вар. 1		Вар. 2		Вар. 3		Вар. 4		Вар. 5		Вар. 6	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
11	68	40	28	48	22	29	37	61	26	80	13
11	67	39	33	51	24	29	39	61	26	81	14
11	67	37	34	51	25	29	39	60	25	82	15
12	67	37	35	51	25	30	39	59	25	82	15
12	66	37	36	51	26	30	40	59	25	83	15
13	66	36	36	52	27	30	40	59	25	83	15
13	66	35	37	53	27	30	40	57	24	83	15

13	66	35	37	53	28	30	41	57	24	84	16
14	66	35	37	53	28	30	41	57	24	84	16
14	66	34	37	53	28	30	41	57	24	85	17
14	65	34	38	54	29	30	41	56	24	85	17
14	65	34	38	54	29	31	41	56	24	86	17
15	64	34	40	54	29	31	42	56	24	86	17
15	64	33	41	55	29	32	42	56	24	88	17
15	64	33	41	56	30	33	42	55	24	88	18
17	64	33	42	56	31	33	43	55	24	88	18
17	64	33	42	56	31	33	43	55	24	89	18
18	62	33	42	58	31	35	44	54	23	90	18
18	62	32	42	59	32	35	44	53	23	90	18
19	61	30	46	60	33	35	45	48	21	92	18

Bap. 7		Bap. 8		Bap. 9		Bap. 10		Bap. 11		Bap. 12	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
26	80	61	11	68	40	28	48	29	80	26	61
26	81	61	11	67	39	33	51	29	81	26	61
25	82	60	11	67	37	34	51	29	82	25	60
25	82	59	12	67	37	35	51	30	82	25	59
25	83	59	12	66	37	36	51	30	83	25	59
25	83	59	13	66	36	36	52	30	83	25	59
24	83	57	13	66	35	37	53	30	83	24	57
24	84	57	13	66	35	37	53	30	84	24	57
24	84	57	14	66	35	37	53	30	84	24	57
24	85	57	14	66	34	37	53	30	85	24	57
24	85	56	14	65	34	38	54	30	85	24	56
24	86	56	14	65	34	38	54	31	86	24	56
24	86	56	15	64	34	40	54	31	86	24	56
24	88	56	15	64	33	41	55	32	88	24	56
24	88	55	15	64	33	41	56	33	88	24	55
24	88	55	17	64	33	42	56	33	88	24	55
24	89	55	17	64	33	42	56	33	89	24	55
23	90	54	18	62	33	42	58	35	90	23	54
23	90	53	18	62	32	42	59	35	90	23	53
21	92	48	19	61	30	46	60	35	92	21	48

Bap. 13		Bap. 14		Bap. 15		Bap. 16		Bap. 17		Bap. 18	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
68	40	22	29	37	61	26	80	28	48	13	11
67	39	24	29	39	61	26	81	33	51	14	11
67	37	25	29	39	60	25	82	34	51	15	11
67	37	25	30	39	59	25	82	35	51	15	12
66	37	26	30	40	59	25	83	36	51	15	12
66	36	27	30	40	59	25	83	36	52	15	13
66	35	27	30	40	57	24	83	37	53	15	13
66	35	28	30	41	57	24	84	37	53	16	13
66	35	28	30	41	57	24	84	37	53	16	14
66	34	28	30	41	57	24	85	37	53	17	14
65	34	29	30	41	56	24	85	38	54	17	14
65	34	29	31	41	56	24	86	38	54	17	14
64	34	29	31	42	56	24	86	40	54	17	15
64	33	29	32	42	56	24	88	41	55	17	15
64	33	30	33	42	55	24	88	41	56	18	15
64	33	31	33	43	55	24	88	42	56	18	17

64	33	31	33	43	55	24	89	42	56	18	17
62	33	31	35	44	54	23	90	42	58	18	18
62	32	32	35	44	53	23	90	42	59	18	18
61	30	33	35	45	48	21	92	46	60	18	19

Задание 7.

Провести сравнение данных с помощью критерия Манна-Уитни.

7.1. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни достижения ведущих российских и американских теннисисток, исходя из числа побед на различных турнирах 2015 года

Россия	Число побед	США	Число побед
Шарапова	12	С.Уильямс	15
Кириленко	8	В.Уильямс	9
Макарова	6	Киз	4
Веснина	5	Викери	3
Павлюченкова	3	В.Таунсенд	2
Чекветадзе	2	М.Таунсенд	1
Клейбанова	2	Харклроуд	1

7.2. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни достижения ведущих российских и испанских футбольных бомбардиров, исходя из числа забитых голов в национальных чемпионатах 2015/16 года

Россия	Число голов	Испания	Число голов
Фёдор Смолов	14	Луис Суарес	22
Квинси Промес	14	Кришт. Роналду	21
Халк	13	Лионель Месси	15
Артём Дзюба	12	Карим Бензема	13
Ахмед Муса	10	Неймар	13
Евгений Луценко	9	Антуан Гризманн	10
Байе Умар Ниассе	8	Гарет Бэйл	8
Л. Мельгарехо	8	Аритц Адурис	7
Мацей Рыбусь	8	Борха Гонсалес	7
Алекс. Самедов	8	Рубен Кастро	6

7.3. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих нападающих российских хоккейных команд в чемпионате России 2019/20 года

ЦСКА		Енисей	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Капризов Кирилл	15,2	Михаил Опарин	12,0
Ртищев Никита	13,2	Михаил Филиппов	11,5
Толчинский Сергей	13,2	Алекс. Клещенко	10,7
Вей Линден	12,7	Валерий Ганус	10,1
Карнаухов Павел	12,7	Данила Сагуткин	10,0
Попов Александр	12,6	Константин Гарбуз	9,3
Кемпе Марио	12,3	Роман Бугаев	9,1
Соркин Максим	11,6	Рост. Воробьев	9,0
Секач Иржи	10,7	Шамиль Гасанов	9,0
Слепышев Антон	10,2	Александр Зотов	8,9

7.4. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих баскетболистов российских и испанских команд в чемпионате Европы 2019 года

УНИКС		Реал	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Вангелис Манцарис	18.8	Джиммер Фредетт	15.5
Джордан Теодор	15.3	Костас Пападакис	13.3
Павел Сергеев	12.8	Ник Калатес	10.7
Джамар Смит	10.6	Тайрес Райс	9.9
Евгений Колесников	9.8	Никос Паппас	8.6
Эррик Макколум	8.5	Рион Браун	8.6
Андрей Кошечев	7.4	Дешон Томас	8.5
Валерий Лиходей	5.9	Уэсли Джонсон	7.8
Джамил Уилсон	5.3	Яннис Папапетру	6.8

7.5. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих баскетболистов российских и команд в чемпионате России 2019 года

УНИКС		Химки	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Вангелис Манцарис	18.8	Алексей Швед	13.7
Джордан Теодор	15.3	Сергей Карасев	13.3
Павел Сергеев	12.8	Сергей Моня	12.7
Джамар Смит	10.6	Тимофей Мозгов	11.9
Евгений Колесников	9.8	Джереми Эванс	9.6
Эррик Макколум	8.5	Энтони Гилл	8.8
Андрей Кошечев	7.4	Девин Букер	8.5
Валерий Лиходей	5.9	Стефан Йович	7.8
Джамил Уилсон	5.3	Петр Губанов	6.8

7.6. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих нападающих российских хоккейных команд в чемпионате России 2019/20 года

СКА Санкт-Петербург		ЦСКА	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Барабанов Александр	14,1	Капризов Кирилл	15,2
Бурдасов Антон	12,9	Ртищев Никита	13,2
Готов Василий	11,3	Толчинский Сергей	13,2
Дергачёв Александр	11,0	Вей Линден	12,7
Каблуков Илья	10,6	Карнаухов Павел	12,7
Марченко Кирилл	10,5	Попов Александр	12,6
Морозов Иван	10,4	Кемпе Марио	12,3
Плотников Сергей	10,2	Соркин Максим	11,6
Подколзин Василий	10,0	Секач Иржи	10,7
Ткачёв Владимир Э.	8,8	Слепышев Антон	10,2

7.7. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих нападающих российских хоккейных команд в чемпионате России 2019/20 года

ЦСКА		Автомобилист	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Капризов Кирилл	15,2	Белоусов Георгий	13,8
Ртищев Никита	13,2	Гареев Артём	12,9
Толчинский Сергей	13,2	Голышев Анатолий	12,5
Вей Линден	12,7	Дацюк Павел	12,4

Карнаухов Павел	12,7	Доус Найджел К	10,3
Попов Александр	12,6	Захаров Илья	10,0
Кемпе Марио	12,3	Кучерявенко А	9,8
Соркин Максим	11,6	Литовченко В	9,5
Секач Иржи	10,7	Мозер Евгений	8,9
Слепышев Антон	10,2	Мэйсек Брукс	7,3

7.8. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков российских футбольных команд в чемпионате России 2019/20 года

ЦСКА		Ростов	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Акинфеев Игорь	17,6	Бабурин Егор	14,7
Набабкин Кир.	14,0	Козлов Алекс.	14,1
Фернандес Мар.	14,0	Логашов Арс.	13,2
Щенников Георг.	12,6	Еременко Роман	12,1
Бийол Яка	11,4	Хаджикадунич	10,9
Влашич Никола	10,3	Чернов Евг.	10,6
Дзгоев Алан	8,7	Чистяков Дм.	10,2
Кучаев Конст.	8,7	Норманн М.	9,9
Обляков Иван	8,1	Байрамян Хорен	9,4
Чалов Фёдор	8,0	Глебов Данил	7,5

7.9. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков российских футбольных команд в чемпионате России 2019/20 года

Зенит		Ростов	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Мих. Кержаков	14,6	Бабурин Егор	14,7
Артём Дзюба	13,7	Козлов Алекс.	14,1
Бр. Иванович	12,7	Логашов Арс.	13,2
Вяч. Караваев	11,7	Еременко Роман	12,1
Сердар Азмун	11,6	Хаджикадунич	10,9
Дуглас Сантос	10,4	Чернов Евг.	10,6
Миха Мевля	10,3	Чистяков Дм.	10,2
Эмм. Маммана	8,8	Норманн М.	9,9
Иг. Смольников	7,7	Байрамян Хорен	9,4
Яр. Ракицкий	7,6	Глебов Данил	7,5

7.10. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков российских футбольных команд в чемпионате России 2019/20 года

Рубин		Ростов	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Дюпин Юрий	14,0	Бабурин Егор	14,7
Денисов Вит.	12,6	Козлов Алекс.	14,1
Башкиров Евг.	12,4	Логашов Арс.	13,2
Давиташвили З.	10,6	Еременко Роман	12,1
Данченко Олег	10,5	Хаджикадунич	10,9
Закиров Камиль	10,0	Чернов Евг.	10,6
Зуев Алекс.	9,9	Чистяков Дм.	10,2
Кварацхелия Хв.	9,9	Норманн М.	9,9
Коновалов Игорь	9,9	Байрамян Хорен	9,4
Могилевец Пав.	5,5	Глебов Данил	7,5

7.11. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков российских футбольных команд в чемпионате России 2019/20 года

Локомотив		Ростов	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Гильерме	13,9	Бабурин Егор	14,7
Игнатьев Влад.	12,9	Козлов Алекс.	14,1
Идову Брайан	12,5	Логашов Арс.	13,2
Кверквелия Сол.	12,2	Еременко Роман	12,1
Рыбус Мацей	11,6	Хаджикадунич	10,9
Хеведес Бен.	11,2	Чернов Евг.	10,6
<u>Чорлука Ведран</u>	10,6	Чистяков Дм.	10,2
Баринов Дм.	9,5	Норманн М.	9,9
Крыховяк Гж.	9,2	Байрамян Хорен	9,4
Миранчук Ал.	8,9	Глебов Данил	7,5

7.12. Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков сборных футбольных команд в чемпионате Европы 1960 года

СССР		Франция	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Вл. Маслаченко	17,8	Жорж Ламья	16,7
Вл. Кесарев	15,9	Жан Тейандье	15,1
Гиви Чохели	13,5	Жан Вендлинг	13,2
Анат. Маслѐнкин	12,2	Робер Жонке	12,1
Анат. Крутиков	11,6	Брюно Родзик	11,9
Юрий Войнов	11,2	Робер Сьятка	10,6
Игорь Нетто	10,6	Андре Шорда	10,2
Виктор Царѐв	9,5	Робер Эрбен	9,9
Сл. Метревели	9,2	Ж.-ЖаМарсель	9,4
Вал. Иванов	8,9	Люсьен Мюллер	7,5

7.13. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков сборных футбольных команд в чемпионате Европы 1960 года

СССР		Чехословакия	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Вл. Маслаченко	17,8	Юстин Яворек	18,7
Вл. Кесарев	15,9	Вильям Шройф	17,1
Гиви Чохели	13,5	Ладислав Новак	15,2
Анат. Маслѐнкин	12,2	Ян Поплугар	15,1
Анат. Крутиков	11,6	Фр. Шафранек	10,9
Юрий Войнов	11,2	Иржи Тихий	10,6
Игорь Нетто	10,6	Титус Буберник	10,2
Виктор Царѐв	9,5	Йозеф Масопуст	9,9
Сл. Метревели	9,2	Антон Моравчик	9,4
Вал. Иванов	8,9	Св. Плускал	7,5

7.14. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков сборных футбольных команд в чемпионате Европы 1960 года

СССР		Югославия	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Вл. Маслаченко	17,8	Благоя Видинич	14,7
Вл. Кесарев	15,9	Мил. Шошкич	14,1
Гиви Чохели	13,5	Влад. Дуркович	13,2
Анат. Маслѐнкин	12,2	Жарко Николич	12,1
Анат. Крутиков	11,6	Том. Црнкович	10,9

Юрий Войнов	11,2	Фахруд. Юсуфи	10,6
Игорь Нетто	10,6	Анте Жанетич	10,2
Виктор Царёв	9,5	Бранко Зебец	9,9
Сл. Метревели	9,2	Бора Костич	9,4
Вал. Иванов	8,9	Желько Матуш	7,5

7.15. Сравните с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков сборных футбольных команд в чемпионате Европы 1960 года

Югославия		Франция	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Благоя Видинич	14,7	Жорж Ламья	16,7
Мил. Шошкич	14,1	Жан Тейандье	15,1
Влад. Дуркович	13,2	Жан Вендлинг	13,2
Жарко Николич	12,1	Робер Жонке	12,1
Том. Црнкович	10,9	Брюно Родзик	11,9
Фахруд. Юсуфи	10,6	Робер Сьятка	10,6
Анте Жанетич	10,2	Андре Шорда	10,2
Бранко Зебец	9,9	Робер Эрбен	9,9
Бора Костич	9,4	Ж.-ЖаМарсель	9,4
Желько Матуш	7,5	Люсьен Мюллер	7,5

7.16 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков сборных футбольных команд в чемпионате Европы 1960 года

Югославия		Чехословакия	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Благоя Видинич	14,7	Юстин Яворек	18,7
Мил. Шошкич	14,1	Вильям Шройф	17,1
Влад. Дуркович	13,2	Ладислав Новак	15,2
Жарко Николич	12,1	Ян Поплугар	15,1
Том. Црнкович	10,9	Фр. Шафранек	10,9
Фахруд. Юсуфи	10,6	Иржи Тихий	10,6
Анте Жанетич	10,2	Титус Буберник	10,2
Бранко Зебец	9,9	Йозеф Масопуст	9,9
Бора Костич	9,4	Антон Моравчик	9,4
Желько Матуш	7,5	Св. Плускал	7,5

7.17 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков сборных футбольных команд в чемпионате Европы 1960 года

Югославия		Франция	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг
Благоя Видинич	14,7	Жорж Ламья	16,7
Мил. Шошкич	14,1	Жан Тейандье	15,1
Влад. Дуркович	13,2	Жан Вендлинг	13,2
Жарко Николич	12,1	Робер Жонке	12,1
Том. Црнкович	10,9	Брюно Родзик	11,9
Фахруд. Юсуфи	10,6	Робер Сьятка	10,6
Анте Жанетич	10,2	Андре Шорда	10,2
Бранко Зебец	9,9	Робер Эрбен	9,9
Бора Костич	9,4	Ж.-Ж.Марсель	9,4
Желько Матуш	7,5	Люсьен Мюллер	7,5

7.18 Сравнить с помощью критерия Манна-Уитни рейтинг ведущих игроков сборных футбольных команд в чемпионате мира 1966 года

Англия		Испания	
Игроки	Рейтинг	Игроки	Рейтинг

Гордон Бэнкс	17,7	Х. Ан. Ирибар	16,7
Рон Спрингетт	15,1	Мануэль Санчис	15,3
Питер Бонетти	14,2	Ферн. Оливелья	13,9
Джордж Коэн	13,1	Аделардо	12,6
Рэй Уилсон	13,9	Луис Дель Соль	11,9
Джек Чарльтон	12,6	Соколис	10,6
Бобби Мур (к)	11,2	Хесус Глария	10,2
Нобби Стайлз	10,9	Луис Суарес	8,9
Алан Болл	9,4	Амансио	8,4
Мартин Питерс	7,5	Марселино	6,5

Методические указания к решению задач.

Задание 3.

Критерий Знаков (G – критерий)

Сравнивая «на глазок» (по процентным соотношениям) результаты до и после какого-либо воздействия, исследователь приходит к заключению, что если наблюдаются различия, то имеет место различие в сравниваемых выборках. Подобный подход категорически неприемлем, так как для процентов нельзя определить уровень достоверности в различиях. Проценты, взятые сами по себе, не дают возможности делать статистически достоверные выводы. Чтобы доказать эффективность какого-либо воздействия, необходимо выявить статистически значимую тенденцию в смещении (сдвиге) показателей. Для решения подобных задач исследователь может использовать критерии различия, например критерий знаков или критерий χ^2 (хи-квадрат).

Критерий знаков (G–критерий) – это непараметрический критерий, который основан на оценке разности попарно сопряженных вариантов (например, до и после лечения или до и после дополнительных занятий). Критерий предназначен для сравнения состояния некоторого свойства у членов двух зависимых выборок на основе измерений, сделанных по шкале не ниже ранговой.

Учитывается не величина, а направленность сдвигов. Применение критерия знаков не зависит от характера распределения данных. Изменения оценивают в альтернативной форме (увеличение-уменьшение и т.п., что обозначают знаками «+» и «-», откуда и произошло название критерия). Случаи, когда парные наблюдения не имеют разницы, в расчет не принимаются. Следует стремиться, чтобы количество нулевых разностей было минимальным, для чего необходимо повышать точность измерения показателей, что обеспечивает непрерывность выборочных данных.

Практическое применение критерия знаков включает следующие этапы:

- 1) определяется направленность изменений в сравниваемых наблюдениях;
- 2) подсчитывается общее число парных наблюдений, имеющих различия (**n**);
- 3) подсчитывается меньшее число однозначных результатов сравнения, обозначаемых как **Z**;
- 4) **Z** сравнивается по специальной таблице с критическими значениями для данного **n**.

Мощность критерия знаков ограничена и составляет примерно $2/3$ мощности критерия Стьюдента, но и требование нормальности соблюдать не обязательно.

Критерий знаков может применяться как к совокупностям непрерывных признаков, так и для оценки различия полуколичественных признаков (баллы и т.п.) при достаточном числе их градаций.

Применение расчета G-критерия Знаков рассмотрим на примере:

Сравниваем между собой уровень тревожности по показаниям частоты сердечных сокращений группы людей до и после просмотра кинофильма «Экипаж», который будет служить в виде тренинга.

Шаг 1. Запишем значения в таблицу.

Шаг 2. Рассчитаем разность значений.

Для данного случая типичным сдвигом (H_0) будет считаться сдвиг в положительную сторону (7 значений, жирно), а нетипичным (H_1) – в отрицательную сторону (3 значения, курсив).

№	Частота пульса до тренинга	Частота пульса после тренинга	Разность
1	64	70	6
2	68	70	2
3	65	64	<i>-1</i>
4	69	67	<i>-2</i>
5	72	80	8
6	75	78	3
7	71	75	4
8	68	66	<i>-2</i>
9	68	68	0
10	70	70	0
11	67	74	7
12	63	72	9

Шаг 3. Найдем $G_{\text{эмп}}$ как сумму нетипичных сдвигов:

$$G_{\text{эмп}} = n_{\text{общ.}} - n_0 - n_+ = 12 - 2 - 7 = 3.$$

Шаг 4. Используя таблицу критических значений, определим $G_{\text{кр}}$ (Приложение А).

4.1. Находим количество человек в выборке. $n=10$

4.2. Определяем $G_{\text{кр}}$ справа от значения количества человек в выборке: для $p < 0,05$ $G_{\text{кр}}=1$; для $p < 0,01$ $G_{\text{кр}}=0$

Шаг 5. Сравниваем $G_{\text{кр}}$ и $G_{\text{эмп}}$.

$$G_{\text{эмп}} = 3 > G_{\text{кр}} = 1$$

Шаг 6. Делаем выводы по правилу.

Правило отклонения H_0 и принятия H_1 :

если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению, соответствующему $p < 0,05$ или превышает его, то H_0 отклоняется, но мы еще не можем определенно принять H_1 . Если эмпирическое значение критерия равняется критическому значению, соответствующему $p < 0,01$ или превышает его, то H_0 отклоняется и принимается H_1 .

Таким образом, принимается альтернативная гипотеза.

Задание 4.

Проверка выборок на нормальность.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину (с.в.). Однако, при решении многих практических задач достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, характеризующие отдельные существенные свойства закона распределения с.в. Такие числа принято называть числовыми характеристиками с.в.

Важнейшими среди них являются:

- характеристики положения, фиксирующие положение с.в. на числовой оси: математическое ожидание (центр распределения с.в.), мода, медиана;
- характеристики рассеяния: дисперсия (отклонение значений с.в. от ее центра), среднее квадратическое отклонение.

Математическим ожиданием (или средним значением) дискретной с.в. (д.с.в.) X , имеющей закон распределения $p_i = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, называется число, равное сумме произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности. Математическое ожидание имеет ту же размерность, что и с.в.

Модой с.в. X M_o называется наиболее вероятное ее значение (то, для которого вероятность p_i или плотность распределения $f(x)$ достигает максимума). Модой д.с.в. X называется ее значение, принимаемое с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями. Для непрерывной с.в. (н.с.в.) X M_o – точка максимума (локального) плотности $f(x)$. Распределение с.в. может иметь одну моду (унимодальное), две или более мод (полимодальные).

Медиана M_e применяется, как правило, только для н.с.в. X и представляет собой такое значение x_m , для которого

$$P\{X < x_m\} = P\{X > x_m\} = 0,5,$$

т. е. одинаково вероятно, окажется ли с. в. X меньше x_m или больше x_m . Геометрически медиана делит площадь фигуры под кривой распределения на две равные части.

Дисперсией (рассеянием) с.в. X называется математическое ожидание (м.о.) квадрата ее отклонения от своего математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

или

$$D(X) = M(X^2) - (MX)^2,$$

т.е. дисперсия равна разности м.о. квадрата с.в. от квадрата ее м.о.

Дисперсия характеризует разброс значений с.в. относительно ее м.о. Дисперсия имеет размерность квадрата размерности с.в., что не всегда удобно, поэтому на практике в качестве характеристики рассеивания пользуются величиной, имеющей размерность случайной величины – средним квадратическим отклонением (СКО).

Средним квадратическим отклонением или стандартным отклонением с.в. X называется положительное значение квадратного корня из ее дисперсии, обозначают через σ_x (или σ):

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Задачей статистического анализа, решаемой после определения основных (выборочных) характеристик является анализ одной выборки на предмет соответствия заданному среднему значению и совместный анализ нескольких выборок. Важнейшим вопросом, возникающим при анализе двух выборок, является вопрос о наличии различий между ними. Обычно для этого проводят проверку статистических гипотез о принадлежности обеих выборок одной генеральной совокупности или о равенстве средних.

Если вид распределения или функция распределения выборки заданы, в этом случае задача оценки различий двух групп независимых наблюдений может решаться с использованием параметрических критериев статистики. Использование параметрических критериев статистики без предварительной проверки вида распределения может привести к определенным ошибкам в ходе проверки рабочей гипотезы.

В группу параметрических критериев методов математической статистики входят методы для вычисления описательных статистик, построения графиков на нормальность распределения, проверка гипотез о принадлежности двух выборок одной совокупности. Эти методы основываются на предположении о том, что распределение выборок подчиняется нормальному (гауссовому) закону распределения. Среди параметрических критериев статистики наиболее часто применяют критерии Стьюдента и Фишера.

Методы проверки выборки на нормальность

Чтобы определить, имеем ли мы дело с нормальным распределением, можно применять следующие методы:

1) в пределах осей можно нарисовать полигон распределения частоты (эмпирическую функцию распределения), интервальную гистограмму или кривую нормального распределения на основе данных исследования. Исследуя формы кривой распределения, можно визуально убедиться в нормальности и определить те параметры, которые определяют нормальность;

2) вычисляется среднее арифметическое значение, медиана и мода, и на основе этого определяется отклонение от нормального распределения. Если мода, медиана и среднее арифметическое друг от друга значительно не отличаются, мы имеем дело с нормальным распределением. Если медиана значительно отличается от среднего, то мы имеем дело с асимметричной выборкой. Если распределение полимодальное, то оно отличается от нормального;

3) эксцесс кривой распределения должен быть равен 0. Кривые с эксцессом, превышающим 3, значительно более вытянуты вверх, чем кривая нормального распределения. Кривые с эксцессом меньшим 3 являются более пологими по сравнению с кривой нормального распределения;

4) после определения среднего значения и стандартного отклонения находят следующие четыре интервала распределения и сравнивают их с действительными данными ряда:

а) $\bar{x} \pm 0,3\sigma$ — к интервалу должно относиться около 25% частоты совокупности,

б) $\bar{x} \pm 0,7\sigma$ — к интервалу должно относиться около 50% частоты совокупности,

в) $\bar{x} \pm 1,1\sigma$ — к интервалу должно относиться около 75% частоты совокупности,

г) $\bar{x} \pm 3\sigma$ — к интервалу должно относиться около 100% частоты совокупности.

Если указанные условия выполняются, можно использовать параметрические критерии.

Для решения задачи необходимо:

- 1) рассчитать среднее арифметическое значение по n экспериментальным данным:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n x_i$$

- 2) рассчитать среднее квадратическое отклонение (СКО): $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_i} (x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$
- 3) по размеру области рассеяния, выраженному в количестве СКО, экспериментальных данных вокруг среднего арифметического значения установить величину интервала распределения;
- 4) сделать вывод о нормальности распределения.

Задание 5.

Критерий Стьюдента.

Критерий Стьюдента (t) позволяет найти вероятность того, что среднее значение выборки соответствует некоторому заданному числу, либо что оба средних значения в выборках относятся к одной и той же совокупности. Данный критерий наиболее часто используется для проверки гипотезы о соответствии среднего выборки конкретному значению или (чаще), что средние двух выборок относятся к одной и той же совокупности.

При использовании критерия сравнения двух выборок можно выделить два случая. В первом случае его применяют для проверки гипотезы о равенстве генеральных средних двух независимых, несвязанных выборок (так называемый двухвыборочный t -критерий). В этом случае есть контрольная группа и экспериментальная (опытная) группа, количество испытуемых в группах может быть различно.

Во втором случае одна и та же группа объектов порождает числовой материал для проверки гипотез о средних и используется так называемый парный t -критерий. Выборки при этом называют зависимыми, связанными.

5.1. t -критерий Стьюдента для одной выборки.

t -критерий для одной выборки позволяет проверить гипотезу о равенстве выборочного среднего некоторому заданному числу.

В так называемых одновыборочных t -критериях, наблюдаемое среднее \bar{X} (вычисленное по реализации выборки) сравнивается с ожидаемым (или эталонным) средним выборки μ (т.е. с некоторым теоретическим средним).

Гипотезы: $H_0 : \bar{X} = \mu$; $H_1 : \bar{X} \neq \mu$.

Статистика критерия: $t_{эмп} = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$

имеет t -распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенью свободы.

Выборочное стандартное отклонение S оценивается по наблюдаемой

реализации выборки:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_i} (x_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

Вычисленное значение t проверяют на предмет попадания в критическую область (критическое значение можно найти по таблице Приложения Б).

Если вычисленное значение $t_{эмп}$ попадает в критическую область ($> t_{кр}$), то говорят, что H_0 отвергается на уровне α в пользу альтернативы.

5.2. t -критерий Стьюдента для независимых выборок

Статистика критерия для случая несвязанных, независимых выборок равна:

$$t_{эмп} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_{x-y}}$$

где \bar{X}, \bar{Y} - средние арифметические в экспериментальной и контрольной группах, σ_{x-y} - стандартная ошибка разности средних арифметических. Находится из формулы:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum_1^{n_1} (x_i - \bar{X})^2 + \sum_1^{n_2} (y_i - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)},$$

где n_1 и n_2 соответственно величины первой и второй выборки.

Если $n_1 = n_2$, то стандартная ошибка разности средних арифметических будет считаться по формуле:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{\sum_1^{n_1} (x_i - \bar{X})^2 + \sum_1^{n_2} (y_i - \bar{Y})^2}{(n-1)n}},$$

где n - величина выборки.

Подсчет числа степеней свободы осуществляется по формуле:

$$k = n_1 + n_2 - 2.$$

При численном равенстве объемов выборок $k = 2n - 2$.

Далее необходимо сравнить полученное значение $t_{эмп}$ с теоретическим значением t -распределения Стьюдента. Если $t_{эмп} < t_{крит}$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае нулевая гипотеза отвергается и принимается альтернативная гипотеза.

Рассмотрим пример использования t -критерия Стьюдента для несвязных и неравных по численности выборок.

Пример 1. В двух группах учащихся – экспериментальной и контрольной – получены следующие результаты по учебному предмету (тестовые баллы; см. табл.).

Таблица. Результаты эксперимента

Первая группа (экспериментальная) $n_1=11$ человек	Вторая группа (контрольная) $n_2=9$ человек
12; 14; 13; 16; 11; 9; 13; 15; 15; 18; 14	13; 9; 11; 10; 7; 6; ; 8; 10; 11

Общее количество членов выборки: $n_1=11$, $n_2=9$.

Расчет средних арифметических: $\bar{X} = 13,636$; $\bar{Y} = 9,444$

Стандартное отклонение: $s_x=2,460$; $s_y=2,186$

Рассчитываем стандартную ошибку разности арифметических средних:

$$\sigma_{x-y} = \sqrt{\frac{60,545 + 38,222}{11+9-2} \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{9} \right)} = 1,053$$

Считаем статистику критерия:

$$t_{эмн} = \frac{13,636 - 9,444}{1,053} = 3,981$$

Сравниваем полученное в эксперименте значение $t_{эмн}$ с табличным значением с учетом степеней свободы, равных числу испытуемых минус два.

Если полученное в эксперименте эмпирическое значение $t_{эмн}$ превышает табличное, то есть основания принять альтернативную гипотезу (H_1) о том, что учащиеся экспериментальной группы показывают в среднем более высокий уровень знаний.

Табличное значение $t_{крит} = 2,1$ при допущении возможности риска сделать ошибочное суждение в пяти случаях из ста (уровень значимости 5 % или 0,05). Уровень значимости определяется $q = 1 - P$, где P – доверительная вероятность.

В эксперименте $t_{эмн} = 3,981$, табличное $t_{крит} = 2,10$. $3,981 > 2,10$, отсюда следует вывод о преимуществе экспериментального обучения.

Если полученное в опыте значение $t_{эмн}$ окажется меньше табличного, тогда надо принять нулевую гипотезу (H_0).

Преимущество экспериментального метода не столько доказано, сколько показано, потому что с самого начала допускается риск ошибиться в пяти случаях из ста ($q = 0,05$). Наш эксперимент мог быть одним из этих пяти случаев. То, что $H_1 = 95\%$ возможных случаев говорит в пользу альтернативной гипотезы, а это достаточно убедительный аргумент в статистическом доказательстве.

Задание 6.

Линейная корреляция

Корреляция (от лат. *Correlatio* «соотношение, взаимосвязь») или корреляционная зависимость – статистическая взаимосвязь двух или более случайных величин. При этом изменения значений одной или нескольких из этих величин сопутствуют систематическому изменению значений другой или других величин (стохастическая или вероятностная зависимость). Наличие или

отсутствие корреляции характеризуется коэффициентом корреляции. Коэффициент корреляции R_{xy} — это показатель взаимного вероятностного влияния двух случайных величин. Коэффициент корреляции может принимать значения от -1 до +1. Если абсолютное значение R_{xy} находится ближе к 1, то это свидетельство сильной связи между величинами, а если его значение ближе к 0, то это говорит о слабой связи или ее отсутствии. Если абсолютное значение R_{xy} равно единице, то можно говорить о функциональной связи между величинами, то есть одну величину можно выразить через другую посредством математической функции.

Для графического представления корреляционной связи можно использовать прямоугольную систему координат с осями, которые соответствуют обоим переменным. Каждая пара значений маркируется при помощи определённого символа. Такой график называется диаграммой рассеяния или полем корреляции.

Рассмотрим методику построения диаграммы рассеяния на примере.

Условие задачи: имеется связанная выборка из 26 пар значений x_k, y_k , представленных в таблице:

Таблица. Исходные данные для построения диаграммы рассеяния

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
x_k	25,2	26,4	26,0	25,8	24,9	25,7	25,7	25,7	26,1	25,8	25,9	26,2	25,6	25,4	26,6
y_k	30,8	29,4	30,2	30,5	31,4	30,3	30,4	30,5	29,9	30,4	30,3	30,5	30,6	31,0	29,6

k	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
x_k	26,2	26,0	22,1	25,9	25,8	25,9	26,3	26,1	26,0	26,4	25,8
y_k	30,4	30,7	31,6	30,5	30,6	30,7	30,1	30,6	30,5	30,7	30,8

Требуется:

- вычислить коэффициент корреляции;
- проверить гипотезу зависимости случайных величин x и y , при уровне значимости $\alpha = 0,05$;
- вычислить коэффициенты уравнения линейной регрессии;
- построить диаграмму рассеяния (корреляционное поле) и график линии регрессии.

Решение:

1 Вычисление коэффициента корреляции.

Вычислить коэффициент корреляции можно по следующим формулам: $R_{x,y} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$

где $\text{cov}(x,y)$ – ковариация случайных величин x и y ;

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - M_x)^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - M_y)^2$$

- оценки дисперсий случайных величин X и Y , соответственно.

$$M_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad M_y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$$

- оценки математического ожидания случайных величин x и y , соответственно.

$$R_{x,y} = \frac{M_{x,y} - M_x M_y}{S_x S_y};$$

$$M_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k; \quad M_y = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k; \quad M_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2; \quad S_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k^2$$

1.1 Вычислим коэффициент корреляции; для этого вычислим значения x_k^2 , y_k^2 и $x_k y_k$ и занесем их в таблицу:

Таблица. Результаты промежуточных расчётов

k	x_k	y_k	x_k^2	y_k^2	$x_k y_k$
1	25.2	30.8	635.04	948.64	776.16
2	26.4	29.4	696.96	864.36	776.16
3	26.0	30.2	676.00	912.04	785.20
4	25.8	30.5	665.64	930.25	786.90
5	24.9	31.4	620.01	985.96	781.86
6	25.7	30.3	660.49	918.09	778.71
7	25.7	30.4	660.49	924.16	781.28
8	25.7	30.5	660.49	930.25	783.85
9	26.1	29.9	681.21	894.01	780.39
10	25.8	30.4	665.64	924.16	784.32
11	25.9	30.3	670.81	918.09	784.77
12	26.2	30.5	686.44	930.25	799.10
13	25.6	30.6	655.36	936.36	783.36
14	25.4	31	645.16	961.00	787.40
15	26.6	29.6	707.56	876.16	787.36
16	26.2	30.4	686.44	924.16	796.48
17	26	30.7	676.00	942.49	798.20
18	22.1	31.6	488.41	998.56	698.36
19	25.9	30.5	670.81	930.25	789.95
20	25.8	30.6	665.64	936.36	789.48
21	25.9	30.7	670.81	942.49	795.13
22	26.3	30.1	691.69	906.01	791.63
23	26.1	30.6	681.21	936.36	798.66
24	26	30.5	676.00	930.25	793.00
25	26.4	30.7	696.96	942.49	810.48
26	25.8	30.8	665.64	948.64	794.64

1.2 Вычислим M_x .

Сложим последовательно все элементы x_k

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{26} = 25,2 + 26,4 + \dots + 25,8 = 669,5$$

Разделим полученную сумму на число элементов

$$< 669,5 / 26 = 25,75; \quad M_x = 25,75$$

1.3 Аналогичным образом вычислим M_y .

Сложим последовательно все элементы y_k

$$y_1 + y_2 + \dots + y_{26} = 30,8 + 29,4 + \dots + 30,8 = 793,0$$

Разделим полученную сумму на число элементов выборки

$$793,0 / 26 = 30,5; M_y = 30,5$$

1.4 Аналогичным образом вычислим M_{xy} .

Сложим последовательно все элементы 6-го столбца таблицы

$$776,16 + 776,16 + \dots + 794,64 = 20412,83$$

Разделим полученную сумму на число элементов

$$20412,83 / 26 = 785,10885 \quad M_{xy} = 785,108846$$

1.5. Вычислим значение S_x^2 .

Сложим последовательно все элементы 4-го столбца таблицы

$$635,04 + 696,96 + \dots + 665,64 = 17256,91$$

Разделим полученную сумму на число элементов

$$17256,91000 / 26 = 663,72731.$$

Вычтем из последнего числа квадрат величины M_x , получим значение для S_x^2

$$S_x^2 = 663,72731 - 25,75000^2 = 663,72731 - 663,06250 = 0,66481.$$

1.6. Вычислим значение S_y^2 .

Сложим последовательно все элементы 5-го столбца таблицы.

$$948,64 + 864,36 + \dots + 948,64 = 24191,84.$$

Разделим полученную сумму на число элементов

$$24191,84 / 26 = 930,45538$$

Вычтем из последнего числа квадрат величины M_y , получим значение для S_y^2

$$S_y^2 = 930,45538 - 30,5^2 = 930,45538 - 930,25 = 0,20538.$$

1.7. Вычислим произведение величин S_x^2 и S_y^2 .

$$S_x^2 S_y^2 = 0,66481 \times 0,20538 = 0,136541.$$

1.8. Извлечем из последнего числа квадратный корень, получим значение $S_x S_y = 0,36951$

1.9. Вычислим значение коэффициента корреляции.

$$r_{x,y} = (785,10885 - 25,75 \times 30,5) / 0,36951 = (785,10885 - 785,37500) / 0,36951 = -0,72028.$$

Ответ: $r_{x,y} = -0,720279$ – имеется значимая отрицательная корреляция.

2. Проверка значимости коэффициента корреляции (проверяем гипотезу зависимости)

Поскольку оценка коэффициента корреляции вычислена на конечной выборке, и поэтому может отклоняться от своего генерального значения, необходимо проверить значимость коэффициента корреляции. Проверка производится с помощью t -критерия:

$$t = \frac{r_{x,y} \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{x,y}^2}}$$

Случайная величина t следует t -распределению Стьюдента и по таблице t -распределения необходимо найти критическое значение критерия ($t_{кр.\alpha}$) при заданном уровне значимости α . Если вычисленное t по модулю окажется меньше чем $t_{кр.\alpha}$, то зависимости между случайными величинами x и y нет. В противном случае, экспериментальные данные не противоречат гипотезе о зависимости случайных величин.

2.1. Вычислим значение t -критерия; получим:

$$t = \frac{-0,7208\sqrt{26-2}}{\sqrt{1-(-0,7208)^2}} = -5,0868$$

2.2. Определим по таблице t -распределения критическое значение параметра $t_{кр.\alpha}$.

Искомое значение $t_{кр.\alpha}$ располагается на пересечении строки соответствующей числу степеней свободы и столбца соответствующего заданному уровню значимости α .

В нашем случае число степеней свободы есть $n - 2 = 26 - 2 = 24$ и $\alpha = 0,05$, что соответствует критическому значению критерия $t_{кр.\alpha} = 2,064$.

2.3. Сравним абсолютное значение t -критерия и $t_{кр.\alpha}$. Абсолютное значение t -критерия не меньше критического $t = 5,08680$, $t_{кр.\alpha} = 2,064$, следовательно, экспериментальные данные, с вероятностью $0,95$ ($1 - \alpha$), не противоречат гипотезе о зависимости случайных величин x и y .

3 Вычисление коэффициентов уравнения линейной регрессии

Уравнение линейной регрессии представляет собой уравнение прямой, аппроксимирующей (приблизительно описывающей) зависимость между случайными величинами x и y . если считать, что величина x свободная, а y зависимая от x , то уравнение регрессии запишется следующим образом

$$Y = a + bX$$

$$\text{где: } b = r_{x,y} \frac{S_y}{S_x}$$

$$a = M_y - bM_x$$

Рассчитанный коэффициент b называют коэффициентом линейной регрессии. В некоторых источниках его называют постоянным коэффициентом регрессии, а b соответственно переменным.

Погрешности предсказания y по заданному значению x вычисляются по формулам:

$$\text{абсолютная погрешность: } \sigma_{y/x} = S_y \sqrt{1 - R_{x,y}^2}$$

$$\text{относительная погрешность: } \delta_{y/x} = \frac{\sigma_{y/x}}{M_y}.$$

Величину $\sigma_{y/x}$ еще называют остаточным средним квадратическим отклонением, оно характеризует уход величины y от линии регрессии, описываемой уравнением, при фиксированном (заданном) значении x .

3.1 Вычислим отношение

$$S_y^2 / S_x^2 = 0,20538 / 0,66481 = 0,30894$$

3.2 Извлечем из последнего числа квадратный корень, получим:

$$\sqrt{S_y^2 / S_x^2} = 0,55582.$$

3.3 Вычислим коэффициент b : $b = -0,72028 \times 0,55582 = -0,40035$

3.4 Вычислим коэффициент a : $a = 30,5 - (-0,40035 \times 25,75000) = 40,80894$.

3.5 Оценим погрешности уравнения регрессии.

Извлечем из S_y^2 квадратный корень, получим:

$$S_y = \sqrt{0,20538} = 0,45319$$

Возведем в квадрат $R_{x,y}$, получим:

$$R^2_{x,y} = -0,72028^2 = 0,51880$$

Вычислим абсолютную погрешность (остаточное среднее квадратическое отклонение):

$$\sigma_{y,x} = 0,45319 \sqrt{1 - 0,51880} = 0,31437$$

Вычислим относительную погрешность:

$$\delta_{y/x} = (0,31437 / 30,50000) 100\% = 1,03073\%$$

Ответ: Уравнение линейной регрессии имеет вид: $Y = 40,80894 - 0,40035 X$.

Погрешности уравнения: $\sigma_{y/x} = 0,31437\%$; $\delta_{y/x} = 1,03073\%$

4 Построение диаграммы рассеяния и графика линии регрессии.

Примечание: Следует тщательно выбрать масштабы и начальные точки на осях, чтобы диаграмма была максимально наглядной.

4.1. Находим минимальный и максимальный элемент выборки x (это 18-й и 15-й элементы соответственно), $x_{min} = 22,1$ и $x_{max} = 26,6$.

4.2. Находим минимальный и максимальный элемент выборки y (это 2-й и 18-й элементы соответственно), $y_{min} = 29,40000$ и $y_{max} = 31,60000$.

4.3. На оси абсцисс выбираем начальную точку чуть левее точки $x_{18}=22,1$, и такой масштаб, чтобы на оси поместилась точка $x_{15}=26,6$ и отчетливо различались остальные точки.

4.4. На оси ординат выбираем начальную точку чуть левее точки $y_2=29,4$, и такой масштаб, чтобы на оси поместилась точка $y_{18} = 31,6$ и отчетливо различались остальные точки.

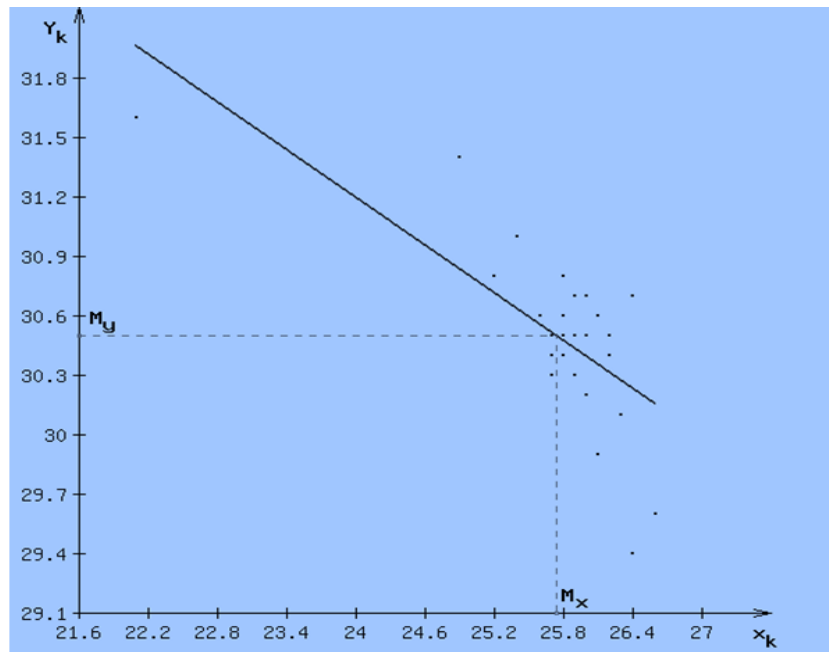
4.5. На оси абсцисс размещаем значения x_k , а на оси ординат значения y_k .

4.6. Наносим точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ..., (x_{26}, y_{26}) на координатную плоскость. Получаем диаграмму рассеяния (корреляционное поле), изображенное на рисунке ниже.

4.7. Начертим линию регрессии.

Для этого найдем две различные точки с координатами (x_{r1}, y_{r1}) и (x_{r2}, y_{r2}) , удовлетворяющие уравнению, нанесем их на координатную плоскость и проведем через них прямую. В качестве абсциссы первой точки возьмем значение $x_{min} = 22,1$. Подставим значение x_{min} в найденное уравнение, получим ординату первой точки. Таким образом, имеем точку с координатами $(22,1, 31,96127)$. Аналогичным образом получим координаты второй точки, положив в качестве абсциссы значение $x_{max} = 26,60000$. Вторая точка будет: $(26,6, 30,1597)$.

Примечание: линия регрессии всегда проходит через точку средних значений величин x и y , т.е. точку с координатами (M_x, M_y) .



Задание 7.

Критерий Манна-Уитни (U -критерий)

U -критерий Манна-Уитни используется для оценки различий между двумя малыми выборками ($n_1, n_2 \geq 3$ или $n_1 = 2, n_2 \geq 5$) по уровню количественно измеряемого признака. При этом первой выборкой принято считать ту, где значение признака больше.

Нулевая гипотеза H_0 : уровень признака во второй выборке не ниже уровня признака в первой выборке; альтернативная гипотеза H_1 : уровень признака во второй выборке ниже уровня признака в первой выборке.

Рассмотрим алгоритм применения U -критерия Манна-Уитни:

- 1) перенести все данные испытуемых на индивидуальные карточки, пометив карточки 1-й выборки одним цветом, а 2-й – другим;
- 2) разложить все карточки в единый ряд по степени возрастания признака и проранжировать в таком порядке;
- 3) вновь разложить карточки по цвету на две группы;
- 3) подсчитать сумму рангов отдельно по группам и проверить, совпадают ли общая сумма рангов с расчетной;
- 4) определить большую из двух ранговых сумм T_x ;
- 5) Вычислить эмпирическое значение U :

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_x(n_x + 1)}{2} - T_x,$$

где n_i – количество испытуемых в i выборке ($i = 1, 2$); n_x – количество испытуемых в группе с большей суммой рангов.

- б) задать уровень значимости α и, используя таблицу, приведённую в приложении, определить критическое значение $U_{кр}(\alpha)$. Если $U_{эмп.} \geq U_{кр.}$, то H_0 на выбранном уровне значимости принимается.

Пример: Рейтинг по математике в подгруппах дал следующие результаты по 10-балльной шкале, представленные в таблице:

Таблица. Результаты рейтинга

№ студента в подгруппе	Первая подгруппа (баллы)	Вторая подгруппа (баллы)
1	9	5
2	7	10
3	7	7
4	8	8
5	6	8
6	4	4
7	4	6
8	8	8
9	6	8
10	6	9
11	5	7
12	-	10

Определить, превосходят ли студенты второй подгруппы по уровню подготовки по математике студентов первой подгруппы.

Сравнение результатов показывает, что баллы, полученные за рейтинг, во второй подгруппе несколько выше, поэтому первой будем считать выборку результатов второй подгруппы.

Таблица. Определение рангов

Вторая подгруппа (баллы)	Ранг	Первая подгруппа (баллы)	Ранг
10	22,5		
10	22,5	9	20.5
9	20.5	8	16.5
8	16.5	8	16.5
8	16.5	7	11.5
8	16.5	7	11.5
8	16.5	6	7.5
7	11.5	6	7.5
7	11.5	6	7.5
6	7.5	5	4.5
5	4.5	4	2
4	2	4	2
Сумма:	168.5	Сумма:	107.5

Таким образом, нам требуется определить, можно ли считать имеющуюся разницу между баллами существенной. Если можно, то это будет означать, что вторая подгруппа имеет более качественные знания по математике. В противном случае, на выбранном уровне значимости различие окажется несущественным.

Для оценки различий между двумя малыми выборками (в данном примере их объёмы равны: $n_1=12$, $n_2=11$) используем критерий Манна-Уитни.

Проранжируем представленную таблицу и результаты представим в таблице.

Таблица рангов

Баллы 2	4			5		6				7	7
Баллы 1		4	4		5		6	6	6		
Ранг	2	2	2	4,5	4,5	7,5	7,5	7,5	7,5	11,5	11,5
Баллы 2			8	8	8	8				10	10
Баллы 1	7	7					8	8	9		
Ранг	11,5	11,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	16,5	20,5	22,5	22,5

При ранжировании объединяем две выборки в одну. Ранги присваиваются в порядке возрастания значения измеряемой величины, т.е. наименьшему рангу соответствует наименьший балл. Заметим, что в случае совпадения баллов для нескольких студентов ранг такого балла следует считать, как среднее арифметическое тех позиций, которые занимают данные баллы при их расположении в порядке возрастания. Например, 4 балла получили 3 студента. Значит, первые 3 позиции в расположении займёт балл, равный 4. Поэтому ранг для 4 баллов – это среднее арифметическое для позиций 1, 2 и 3,

или: $\frac{1+2+3}{3} = 2$. Аналогично рассуждаем при вычислении ранга для балла,

равного 5. Такой балл получили двое студентов. Значит, при распределении по возрастанию первые три позиции занимает балл, равный 4, а четвёртую и пятую позиции займёт балл, равный 5. Поэтому его ранг будет равен среднему арифметическому между числами 4 и 5, т.е. 4,5.

Используя предложенный принцип ранжирования, получим таблицу рангов.

Заметим, что выбор среднего арифметического в качестве ранга применяется при любом ранжировании, в том числе необходимого и для вычисления других критериев достоверности или же коэффициента корреляции Спирмена.

Чтобы использовать критерий Манна-Уитни, рассчитаем суммы рангов рассматриваемых выборок. Сумма для первой выборки равна 168,5, для второй – 107,5. Обозначим наибольшую из этих сумм через T_x ($T_x=168,5$). Среди объёмов n_1 и n_2 выборок наибольший обозначим n_x . Этих данных достаточно, чтобы воспользоваться формулой расчёта эмпирического значения критерия:

$$U_{\text{эм.}} = n_1 n_2 + \frac{n_x(n_x + 1)}{2} - T_x \quad U_{\text{эм.}} = 11 \times 12 + \frac{12(12 + 1)}{2} - 168,5 = 41,5$$

$$U_{\text{кр.}(0,05)} = 33$$

$$U_{\text{кр.}} = 33 \leq 41,5 = U_{\text{эм.}}$$

Следовательно, различия в уровне знаний по математике среди студентов можно считать несущественными.

Рекомендуемая литература

1. А.П. Русин Практикум по дисциплине «Методы непараметрической оценки объектов» – Ростов н/Д: СКИФ ДГТУ, 2019.
<https://de.donstu.ru/CDOCourses/structure/new/34591/1314/4799.pdf>.
2. Е. Сидоренко Методы математической обработки в психологии. – С.-Пб.: Изд-во Речь, 2021. <https://ihtika.ru/book/download/sidorenko-ev-metody-matematicheskoy-obrabotki-v-psihologii?ysclid=ll9iya8sn4325630184>.
3. Шелонцев В.А., Шелонцева Л.Н. Непараметрические методы статистики: Учебное пособие. - изд. 3-е, исправленное. - Омск: Полиграфический центр КАН – 2016.
<http://lib.omgpu.ru/FullText/%D0%A8%D0%B5%D0%BB%D0%BE%D0%BD%D1%86%D0%B5%D0%B21.pdf>.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Критические значения критерия Знаков

№ п/п	n	p=0,05	p=0,01
1	5	0	—
2	6	0	—
3	7	0	0
4	8	1	0
5	9	1	0
6	10	1	0
7	11	2	1
8	12	2	1
9	13	3	1
10	14	3	2
11	15	3	2
12	16	4	2
13	17	4	3
14	18	5	3
15	19	5	4
16	20	5	4
17	21	6	4
18	22	6	5
19	23	7	5
20	24	7	5

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Значение процентных пределов t в зависимости от k степеней свободы и от вероятности для распределения Стьюдента

$k \backslash p$	0,9	0,95	0,975	0,98	0,99	0,995	0,997	0,998	0,999
1	6,314	12,706	25,452	31,821	63,657	127,36	212,2	318,3	636,6
2	2,29	4,303	6,205	6,965	9,925	14,089	18,216	22,327	31,6
3	2,353	3,182	4,177	4,541	5,841	7,453	8,891	10,214	12,922
4	2,132	2,776	3,495	3,747	4,604	5,597	6,435	7,173	8,61
5	2,015	2,571	3,163	3,365	4,032	4,773	5,376	5,893	6,869
6	1,943	2,447	2,969	3,143	3,707	4,317	4,8	5,208	5,959
7	1,895	2,365	2,841	2,998	3,499	4,029	4,442	4,785	5,408
8	1,86	2,306	2,752	2,896	3,355	3,833	4,199	4,501	5,041
9	1,833	2,262	2,685	2,821	3,25	3,69	4,024	4,297	4,781
10	1,812	2,228	2,634	2,764	3,169	3,581	3,892	4,144	4,587
12	1,782	2,179	2,56	2,681	3,055	3,428	3,706	3,93	4,318
14	1,761	2,145	2,51	2,624	2,977	3,326	3,583	3,787	4,14
16	1,746	2,12	2,473	2,583	2,921	3,252	3,494	3,686	4,015
18	1,734	2,101	2,445	2,552	2,878	3,193	3,428	3,61	3,922
20	1,725	2,086	2,423	2,528	2,845	3,153	3,376	3,552	3,849
22	1,717	2,074	2,405	2,508	2,819	3,119	3,335	3,505	3,792
24	1,711	2,064	2,391	2,492	2,797	3,092	3,302	3,467	3,745
26	1,706	2,056	2,379	2,479	2,779	3,067	3,274	3,435	3,704
28	1,701	2,048	2,369	2,467	2,763	3,047	3,25	3,408	3,674
30	1,697	2,042	2,36	2,457	2,75	3,03	3,23	3,386	3,646
40	1,684	2,021	2,050	2,423	2,704	2,9712	3,295	3,307	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,660	3,123	3,232	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,358	2,617	2,989	3,160	3,373
∞	1,645	1,96	2,241	2,326	2,576	2,807	2,968	3,09	3,291

Критические значения критерия U Манна-Уитни
(для проверки ненаправленных альтернатив) $P=0,05$

n ₁	n ₂													
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	13
5	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9	12	15	17	20	23	26	28	30	34	37	39	42	45	48
10	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55
11	16	19	23	26	30	33	37	40	44	48	51	55	58	62
12	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69
13	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76
14	22	26	30	36	40	45	50	55	59	64	67	74	78	83
15	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90
16	26	31	37	42	48	53	59	64	70	75	81	86	92	98
17	28	34	39	45	51	57	63	67	75	81	87	93	99	105
18	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112
19	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119
20	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127